La determinazione per via sintetica dell'ordine e di alcune proprietà di curve definite come luoghi

Italo D'Ignazio[*], Raffaele Mascella[†], Ercole Suppa[‡]

15 marzo 2002

Sommario. Dapprima vengono richiamati due teoremi sulle omografie coi quali si dà una dimostrazione geometrica del principio di corrispondenza. Successivamente si danno esempi di curve, definite come luoghi, studiate con metodo sintetico.

Abstract. In this paper we give a geometric proof of the corrispondence principle through two main theorems on homographies. Then we give some examples of curves, defined as geometric locus, studied in a syntetic way.

Keywords: corrispondenza, fasci di rette, ordine di una curva algebrica, punti multipli.

1 Premessa

I metodi sintetici in geometria, tenuti in grande onore fino a circa cinquanta anni fa, sia nell'insegnamento secondario che in quello universitario, sono stati in seguito progressivamente trascurati, a favore della geometria analitica o, più generalmente, dei metodi che si avvalgono del calcolo. Le ragioni di ciò sono molte e complesse, tuttavia è lecito ipotizzare che l'abbandono dei metodi sintetici non abbia sempre avuto effetti positivi nella formazione dei futuri matematici ed anche nel progredire delle ricerche scientifiche. Il metodo analitico,

[*]Ex-Presidente della sezione Mathesis di Teramo, e-mail: idignaz@tin.it
[†]Dipartimento M.E.T. dell'Università di Teramo, e-mail: rmascella@unite.it
[‡]Liceo Scientifico Statale "A. Einstein", Teramo, e-mail: ercolesuppa@gmail.com

per potenza e generalità, è senza dubbio un architrave dell'edificio matematico; però non mancano questioni nelle quali le difficoltà, le dimensioni e la laboriosità dei calcoli costituiscono un ostacolo praticamente insormontabile. In proposito T. Lemoyne, nella prefazione di [1], fornisce due esempi:

(1) Qual è il luogo dei centri dei cerchi tangenti a due coniche date? Con metodo sintetico, applicando il principio di corrispondenza di Chasles, si trova agevolmente che è una curva del 28° ordine, di cui si stabiliscono alcune importanti proprietà. Se si pretendesse di scriverne l'equazione cartesiana s'andrebbe incontro ad una fatica immane.

(2) Il luogo dei piedi delle normali condotte da un punto alle cubiche passanti per cinque punti dati e tangenti a tre rette date è una curva del 384° ordine. Si tratta di un risultato praticamente inaccessibile alla geometria analitica.

In questo articolo presentiamo due teoremi che possono essere considerati delle generalizzazioni di quello sulla *generazione proiettiva delle coniche*; mediante essi diamo, poi, una dimostrazione geometrica del *principio di corrispondenza di Chasles*; infine, mediante alcuni esempi significativi, mostriamo come l'applicazione di questi teoremi consenta la determinazione, per via sintetica, dell'*ordine* di curve algebriche definite come luoghi ed il riconoscimento di alcune importanti proprietà delle medesime.

2 Generazione di curve mediante fasci di rette

Teorema 2.1. *Se due fasci di rette di centri O, O' sono tali che ad una retta del primo corrispondano n rette del secondo, ad una retta del secondo m rette del primo e la retta OO' non corrisponda a se stessa nei due fasci, il luogo dei punti di intersezione delle rette omologhe è una curva algebrica di ordine $m+n$ che ammette il punto O come multiplo d'ordine m ed il punto O' come multiplo d'ordine n. Le tangenti in O sono le m rette del primo fascio corrispondenti alla $O'O$ pensata come appartenente al secondo fascio e le n tangenti in O' sono le rette del secondo fascio corrispondenti alla OO' pensata come appartenente al primo.*

Dimostrazione. Ricordiamo, preliminarmente, che una curva d'ordine $m + n$ taglia una retta in $m+n$ punti (tra reali e complessi, propri e impropri, ciascuno contato col dovuto ordine di molteplicità) e viceversa. Cerchiamo, allora, il numero di punti del luogo situati su una qualsiasi retta OX (fig. 1); alla retta OX corrispondono n rette $O'X_1, O'X_2, \ldots, O'X_n$, dunque su OX ci sono n punti del luogo oltre ad O, e non ce ne sono altri. D'altra parte, alla retta $O'O$

del secondo fascio corrispondono m rette $OY_1, OY_2, \ldots, OY_m$ e ciò mostra che O è un punto del luogo di molteplicità m. La generica retta OX taglia quindi il luogo in $m + n$ punti

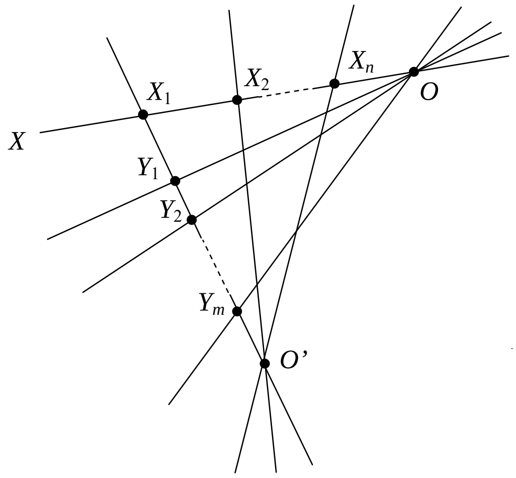

Figura 1

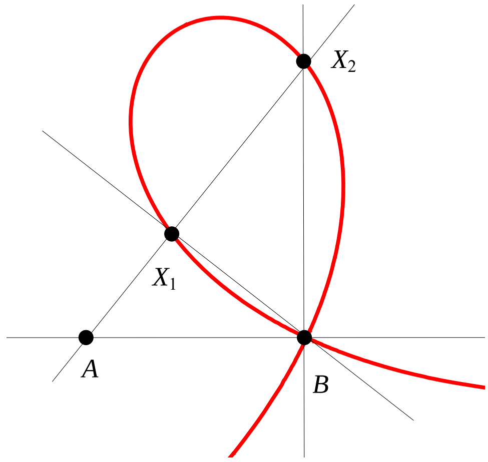

Figura 2

(dei quali m riuniti in O) e non di più: ciò basta per affermare che il luogo è una curva d'ordine $m + n$. Inoltre, quando uno dei punti X_i va a coincidere con O la retta OX diventa tangente in O e si sovrappone ad una delle rette $OY_1, OY_2, \ldots, OY_m$ che corrispondono a $O'O$[1]. Allo stesso modo si vede che O' è punto multiplo di molteplicità n. □

Corollario 2.2 (**Teorema di Steiner**). *Se i due fasci sono proiettivi, allora $m = n = 1$, ed il luogo é una conica che passa per i centri dei due fasci ed ha ivi come tangenti le rette corrispondenti alla congiungente di tali centri.*

Notazione. A volte, una corrispondenza come quella del teorema 2.1. verrà indicata, per brevità, come corrispondenza $[m, n]$.

Vediamo qualche applicazione.

Esempio 2.3. *Siano dati una retta, r, un suo punto, O, ed un punto A fuori di essa. Si mandi per A una generica retta s e sia M la sua intersezione con*

[1]Per chiarire può essere utile il seguente esempio. Si abbiano due fasci di rette, F_A, F_B, di centri rispettivi A, B; essi siano tali che ad una retta di F_A corrispondano due rette di F_B e ad una retta di F_B corrisponda una retta di F_A; inoltre, AB non corrisponda a se stessa. Il luogo dei punti di intersezione è, allora, una cubica con un punto doppio in B. Si mandi per A una retta che intersechi il luogo in X_1 ed X_2 (fig. 2). Le corrispondenti di AX_1X_2 sono la BX_1 e la BX_2. Se immaginiamo che la AX_1X_2 ruoti intorno ad A tendendo ad AB, i punti X_1 ed X_2 tendono entrambi a B e le BX_1, BX_2 tendono alle tangenti in B.

la r, poi, a partire da M, si prendano su s, nei due sensi, i segmenti MN, MN' tali che $MN = MN' = MO$. Si chiede il luogo di N ed N'.

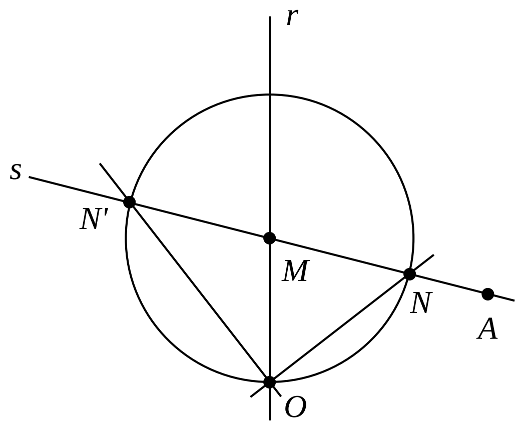

FIGURA 3

Consideriamo i fasci F_A, F_O di centri rispettivi A, O (fig. 3). Le condizioni del problema inducono tra essi una corrispondenza tale che ad una retta AM del primo corrispondono le due rette ON, ON' del secondo, mentre ad una retta, ON, del secondo ne corrisponde una sola, la AN, del primo. Inoltre la retta OA, sia considerata appartenente al primo che al secondo, non corrisponde a se stessa. Il luogo richiesto è, quindi, una curva di ordine $2 + 1 = 3$, ossia una *cubica* che passa semplicemente per A ed ha in O un punto doppio. Da $MN = MN' = MO$ consegue che il triangolo NON' è inscritto nel cerchio di diametro NN', ossia è *rettangolo*. Questa osservazione implica che nel fascio F_O le rette ON, ON' sono tra loro perpendicolari, quindi al variare di N, determinano una *involuzione circolare*, le cui rette unite sono le *rette isotrop*e uscenti da O. Ne consegue che la cubica luogo passa per i *punti ciclici*, ossia è *circolare*. Naturalmente, anche le tangenti in O (che sono corrispondenti di AO), sono perpendicolari ed O è un nodo reale. Questa curva è nota con il nome di **strofoide** (fig. 4).

Se AO è perpendicolare ad r si ha la **strofoide retta**. Relativamente a questo caso vediamo alcune altre proprietà (fig. 5). Condotta per A una generica retta s che interseca r in M, le due corrispondenti in F_O si costruiscono in modo ovvio. Meno immediata è la costruzione della corrispondente di una generica retta ON di F_O in F_A. Posto $\widehat{MON} = \alpha$, si ha:

$$\widehat{MAO} = 90° - \widehat{OMN} = 90° - (180° - 2\alpha) = 2\alpha - 90°$$

Costruiamo l'angolo $\widehat{MOL}$ doppio di $\widehat{MON}$ ed osserviamo che:

$$\widehat{AOL} = \widehat{MAO}$$

Ciò implica che OL ed AM sono parallele. Pertanto, costruita la OL, la parallela per A alla OL è la corrispondente di ON. Quando la s coincide con la AO si ha:

$$\widehat{NAO} = 2\alpha - 90° = 0° \quad \Rightarrow \quad \alpha = 45° \quad \Rightarrow \quad \widehat{AON'} = 45° + 90° = 135°$$

ossia: *le due rette di F_O, corrispondenti alla AO di F_A, formano con AO angoli di 45° e 135°, rispettivamente. Esse sono le tangenti nodali della strofoide. Si vede poi immediatamente che la tangente in A è parallela alla r.*

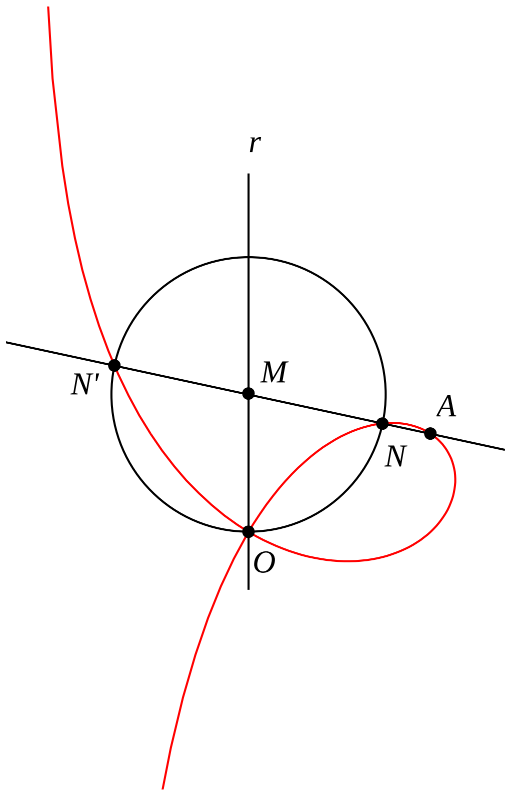

Figura 4

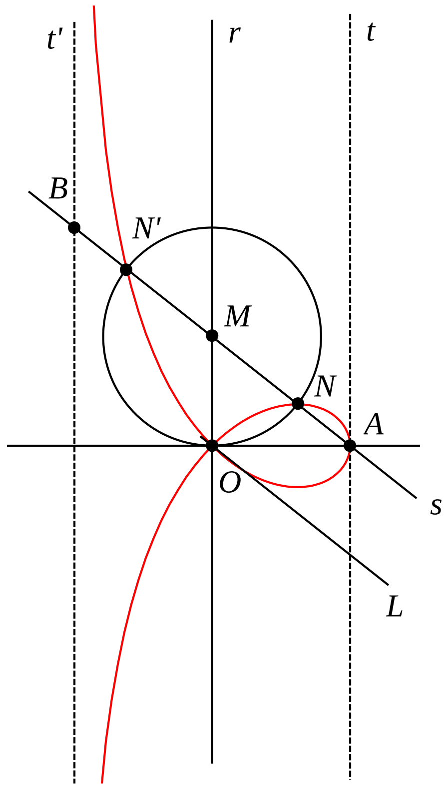

Figura 5

Osservazione. Sia t' la simmetrica rispetto ad r della retta t tangente in A alla strofoide (fig. 5). MO è cateto del triangolo rettangolo MOA, del quale MA è ipotenusa. Quindi $MN = MN' = MO < MA$; ciò implica che, al variare di s, i punti N, N' si mantengono sempre entro la striscia delimitata da t e t', cioè la strofoide è tutta compresa tra queste due rette. Inoltre, al tendere di $\widehat{NAO}$ a 90°, N si approssima ad A quanto si vuole; conseguentemente, N' si approssima a t'. Ciò implica che t' è *asintoto.* In sintesi: senza scomodare coordinate ed equazioni, senza eseguire calcoli, ma solo utilizzando il teorema 2.1, abbiamo potuto stabilire per via sintetica che *il luogo richiesto è una cubica circolare con nodo reale in* O *e tangenti nodali tra loro perpendicolari.* Abbiamo poi studiato un caso particolare (r ed OA perpendicolari, ma i risultati sono del tutto analoghi anche nel caso generale) determinando l'asintoto reale e la striscia entro la quale è compresa tutta la curva. Possiamo aggiungere che, per la strofoide retta, la OA è asse di simmetria.

Esempio 2.4. *Sono dati una circonferenza,* γ*, un suo punto,* O*, ed un punto,* P*, che non le appartiene. Si mandi per* O *una retta* r *e si indichi con* M *la sua intersezione con* γ *(diversa da* O*). Determinare il luogo dell'intersezione* Q *della* r *con la perpendicolare in* P *alla* PM*.*

Consideriamo i fasci di rette F_O, F_P di centri rispettivi O e P (fig. 6). Secondo le condizioni del problema ad *una* retta di F_O (la OM) corrisponde un'*unica* retta di F_P (la perpendicolare per P alla PM), mentre ad una retta di F_P (che taglia γ anche in M', oltre che in M) corrispondono *due* rette di F_O (la OM e la OM'). Inoltre, OP non corrisponde a se stessa.

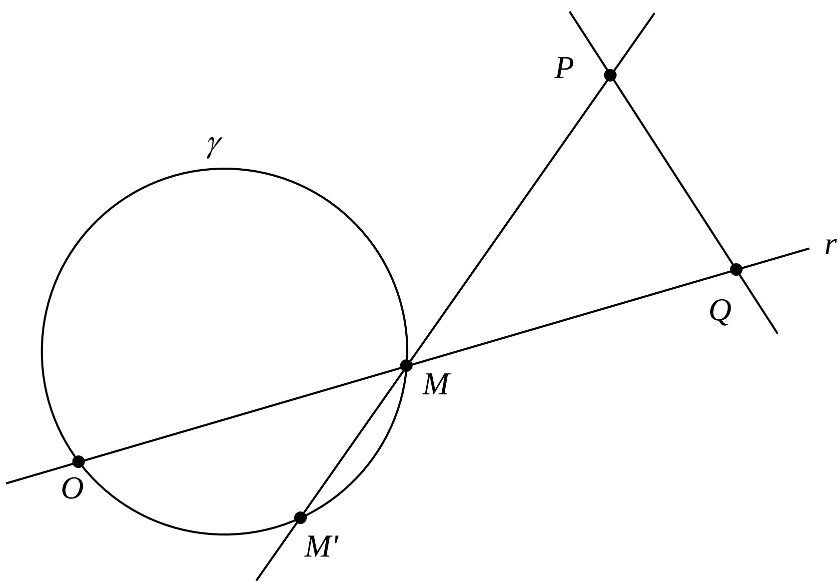

FIGURA 6

Pertanto il luogo richiesto è una *cubica* che passa semplicemente per P ed ha in O un *punto doppio* (che è certamente un nodo reale se P è interno a γ, come mostra la costruzione delle tangenti, cioè delle corrispondenti di PO).

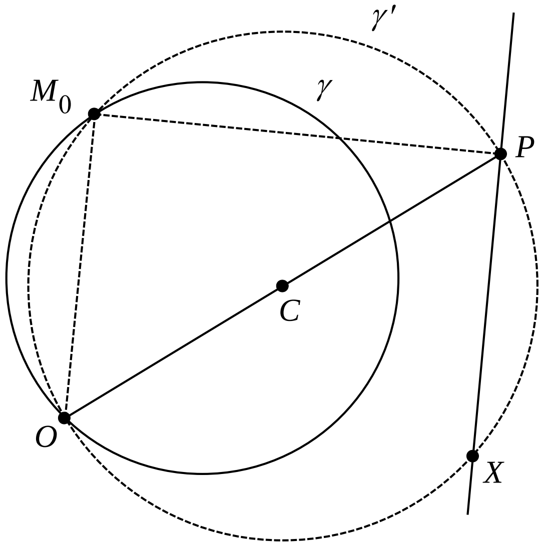

FIGURA 7

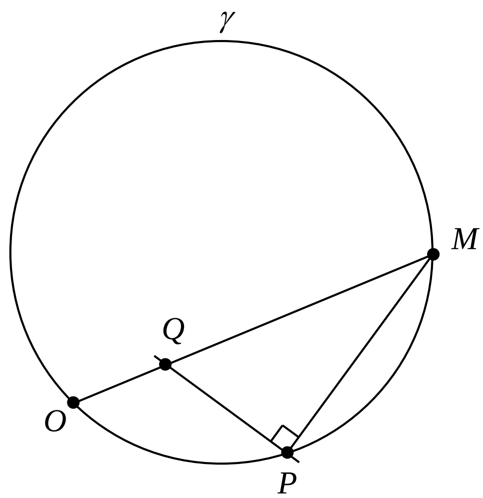

FIGURA 8

Cerchiamone (fig. 7) i punti impropri (reali): essi si ottengono quando la r e la sua corrispondente PX sono parallele. Pertanto, detto C il punto medio del segmento OP, con centro in C e raggio CO, tracciamo una circonferenza γ' che taglia γ in MO. Essendo $\widehat{OM_OP} = 90°$, la parallela per P alla OM_O è la retta di F_P che dà la direzione del punto improprio della cubica. Questo punto improprio è certamente reale perché, siccome γ e γ' si intersecano in O, si intersecano necessariamente in un secondo punto. Gli altri due punti impropri della curva sono i punti ciclici (*cubica circolare*); ciò si può dedurre osservando, come si è già fatto nell'esempio 2.3, che le rette del fascio F_P sono a due a due perpendicolari e quindi danno luogo ad una involuzione circolare.

Osservazione. Nel problema è posta esplicitamente la condizione che P non appartenga a γ e ciò perché, in tale eventualità, le conclusioni precedenti non sono più valide. In questo caso, infatti, la corrispondenza è $[1, 1]$ ed il teorema 2.1 porta a concludere che il luogo è una *conica*; inoltre, se si considera l'involuzione circolare formata dalle rette del fascio F_P, si trova che essa passa per i punti ciclici, cioè è un cerchio. Ma a questa conclusione si può arrivare più semplicemente per via elementare: basta osservare (fig. 8) che l'angolo $\widehat{QMP}$ è costante; di conseguenza lo è anche $\widehat{OQP}$ ed il luogo dei punti Q che vedono sotto angolo costante il segmento OP è, appunto, un cerchio.

3 Il principio di corrispondenza.

Come rimarcato, la validità del teorema 2.1 richiede che la retta congiungente i centri dei due fasci non corrisponda a se stessa. Ma, con ragionamento del tutto analogo, può essere facilmente generalizzato al caso in cui la retta dei centri corrisponda a se stessa h volte:

Teorema 3.1. *Se le rette di due fasci di centri O, O' sono in corrispondenza tale che ad una retta del primo corrispondano m rette del secondo e ad una retta del secondo n rette del primo, ed inoltre la OO' corrisponda a se stessa h volte nei due fasci, il luogo dei punti d'intersezione delle rette corrispondenti è una curva d'ordine $m+n-h$, che ammette O e O' come punti multipli di molteplicità $m-h$, $n-h$, rispettivamente*[2].

Esempio 3.2. *Sono dati una circonferenza, γ, e tre punti che non le appartengono, A, B, C. Si mandi per A una retta r e sia M una delle due intersezioni con γ. Da M si mandi la secante che passa per C e sia N la sua (ulteriore) intersezione con γ. Infine, si tracci la BN e sia P la sua intersezione con la AM. Si chiede il luogo di P al variare di r.*

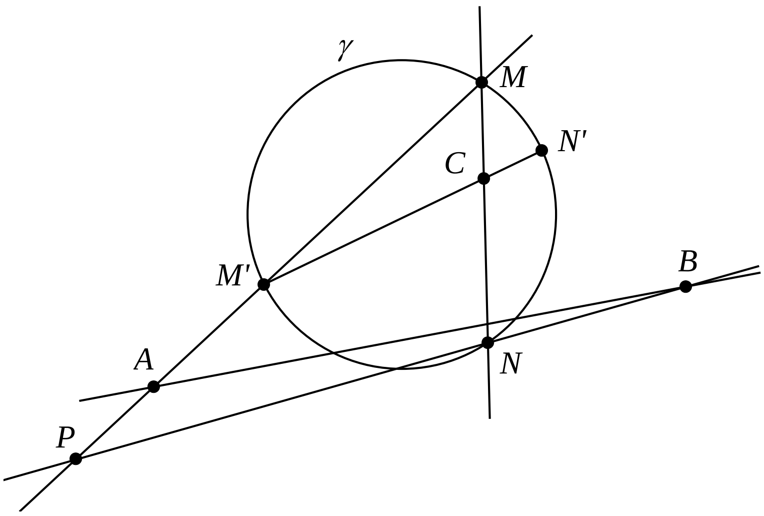

FIGURA 9

[2]Due rette hanno in comune, in generale, un punto (eventualmente improprio). Ma se le due rette sono sovrapposte tutti i punti dell'una sono anche punti dell'altra. Nell'enunciato precedente non vengono considerate intersezioni i punti comuni alla retta OO', considerata appartenente ad un fascio, con se stessa, considerata appartenente all'altro fascio. In caso contrario, dovremmo dire che il luogo è costituito dalla retta OO' (contata h volte) e dalla curva d'ordine $m+n-h$ di cui all'enunciato.

Consideriamo i fasci F_A, F_B di centri rispettivi A, B. Le condizioni del problema determinano fra essi una corrispondenza tale che ad una retta di F_A (la $AM'M$ in fig. 9) corrispondono due rette di F_B (la BN e la BN') e ad una retta di F_B ne corrispondono due di F_A. Inoltre, la AB non corrisponde, *in generale*, a se stessa, sia considerata appartenente ad F_A che ad F_B. Per il teorema 2.1 ($m = 2$, $n = 2$) il luogo è una *quartica*, per la quale A e B sono *punti doppi*. Se la retta AB interseca γ in due punti distinti, la costruzione delle rette corrispondenti ad AB (nell'uno e nell'altro fascio) fornisce le tangenti in A e B, e possiamo facilmente concludere che questi sono *nodi reali* (fig. 10). Se AB è tangente a γ, le tangenti coincidono, ossia A e B sono *cuspidi* (fig. 11). Infine, se AB è esterna a γ, A e B sono *punti doppi isolati* (fig. 12).

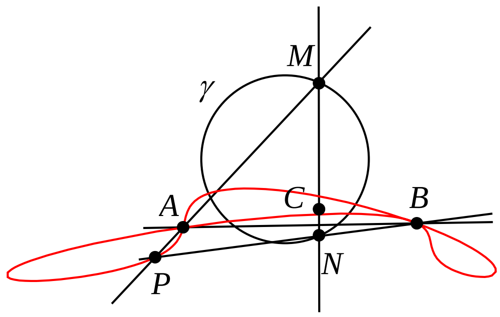

FIGURA 10

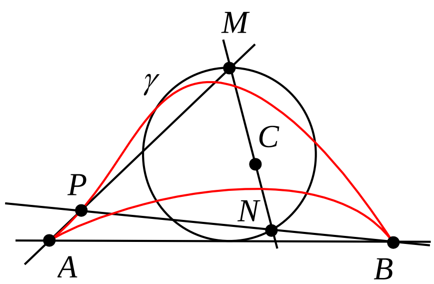

FIGURA 11

Come caso particolare può accadere che il punto dato C appartenga alla retta AB. Come si vede facilmente, avviene allora che quest'ultima *corrisponde a se stessa due volte*, sia considerata appartenente ad F_A che ad F_B. Con riferimento alle notazioni del teorema 3.1, abbiamo $m = 2$, $n = 2$, $h = 2$; il luogo è una curva di ordine 2, ossia una conica (fig. 13) che *non* passa né per A ($n - h = 0$) né per B ($m - h = 0$).

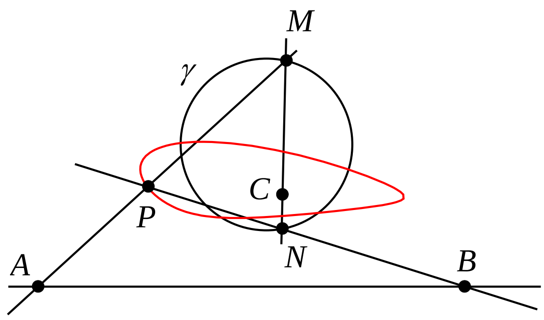

FIGURA 12

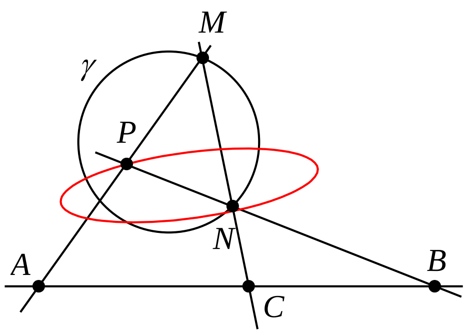

FIGURA 13

Se si tagliano i due fasci di centri O, O' del teorema 2.1 con una retta ℓ qualsiasi, essi determinano su ℓ due punteggiate sovrapposte tali che ad un punto della prima corrispondono n punti della seconda e ad un punto della seconda m punti della prima. I punti uniti di questa corrispondenza sono, evidentemente, *i punti del luogo* di cui al teorema 2.1, *situati su* ℓ; se ne hanno, dunque, $m+n$. Reciprocamente, se sono date su una retta ℓ due punteggiate, i cui punti indichiamo con X, X', e se a un punto X corrispondono n punti X' e ad un punto X' corrispondono m punti X, il luogo dei punti d'intersezione delle rette OX, $O'X'$ che congiungono i punti corrispondenti X, X' con due punti fissi O, O' del piano è, in conseguenza del teorema 2.1, una curva d'ordine $m + n$. Se ne conclude il teorema seguente, dovuto a Chasles e noto come **principio di corrispondenza**:

Teorema 3.3. *Quando su una retta ℓ si sovrappongono due punteggiate X, X' tali che ad un punto X corrispondano n punti X' e ad un punto X' corrispondano m punti X, il numero dei punti uniti è $m + n$.*

Basandosi su questo principio, Chasles ha costruito la **teoria delle caratteristiche** con la quale si può stabilire l'ordine di una curva algebrica definita come luogo di punti soddisfacenti ad una certa proprietà; e ciò per via puramente geometrica, senza bisogno di scriverne l'equazione cartesiana. Nel caso in cui il luogo è descritto da un punto di una retta r variabile, è possibile stabilirne l'ordine senza far ricorso al principio di corrispondenza nella sua forma generale, ma *limitandosi a contare il numero dei punti del luogo situati sulla* r: questo numero coincide con l'ordine cercato.

Esempio 3.4. *Dati su un piano un punto O ed una conica γ, si mandi per O una secante variabile OAB. Si chiede il luogo dei punti d'intersezione delle tangenti a γ condotte in A e in B.*

Consideriamo la tangente in A (fig. 14) e sia P la sua intersezione con la tangente in B. P è un punto del luogo e su AP non ce ne sono altri; se, infatti, esistesse su essa un secondo punto $P' \neq P$ da P' potremmo condurre una seconda tangente $P'B'$ e dovrebbe, necessariamente, essere $B' \neq B$, con la conseguenza che la retta OB' non coinciderebbe con la OAB. Allora, se l'intersezione della retta AP con il luogo è unica, per il principio di corrispondenza questo luogo non può che essere una retta (è la polare di O rispetto a γ , come è ben noto).

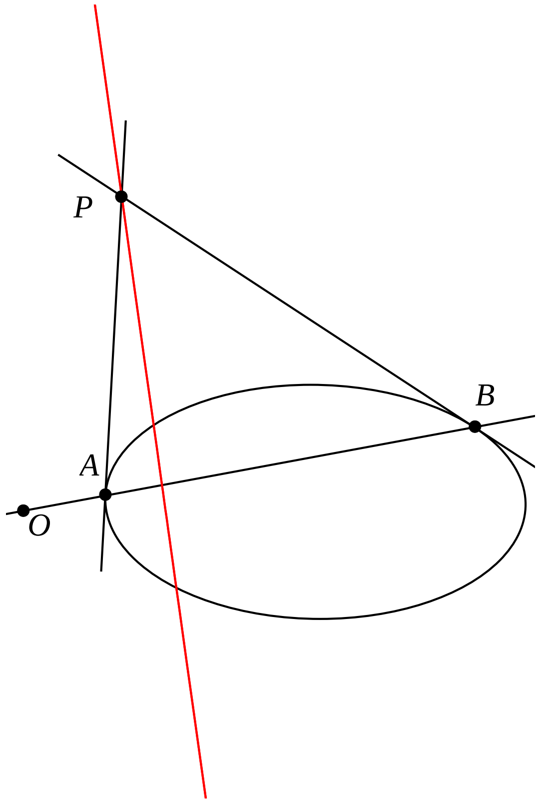

FIGURA 14

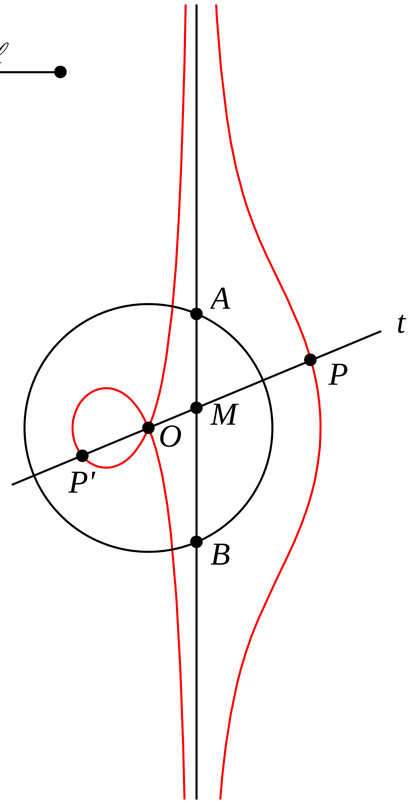

FIGURA 15

Esempio 3.5. *Sono dati un punto O ed una retta r. Per O si mandi una secante t che intersechi r in M. A partire da M si riportino su t, nell'uno e nell'altro verso, due segmenti MP, MP' entrambi di lunghezza assegnata ℓ. Si chiede il luogo di P e P'.*

Si tracci la circonferenza di centro O e raggio ℓ e siano A e B le sue intersezioni con r (fig. 15); OA e OB sono due particolari posizioni di t, ed essendo $AO = BO = \ell$, O è un punto del luogo; anzi, un punto doppio. Si tracci, ora, per O una generica t. Su t, oltre ai due punti riuniti in O, giacciono altri due punti, P e P', del luogo, e non ve ne sono altri. Pertanto, il luogo è una *quartica*: si tratta della famosa **concoide di Nicomede**[3], che si incontra nella risoluzione di problemi classici di terzo e quarto grado, ad esempio la trisezione dell'angolo.

Esempio 3.6. *Determinare la concoide di una conica di dato polo O e dato intervallo ℓ.*

[3]La retta r si chiana *base* della concoide, il punto O *polo*, la lunghezza ℓ *intervallo*. Il concetto di concoide può essere generalizzato al caso che la base sia una curva qualsiasi.

Si tracci la circonferenza avente centro nel polo O e raggio ℓ e siano A, B, C, D i suoi quattro punti d'intersezione con la conica (fig. 16). Le rette OA, OB, OC, OD fanno parte del fascio che genera la concoide ed essendo $OA = OB = OC = OD = \ell$, O è punto quadruplo. Condotta una generica retta OX, su essa si trovano altri quattro punti della concoide e, pertanto, complessivamente otto. La concoide richiesta è una curva dell' ottavo ordine.

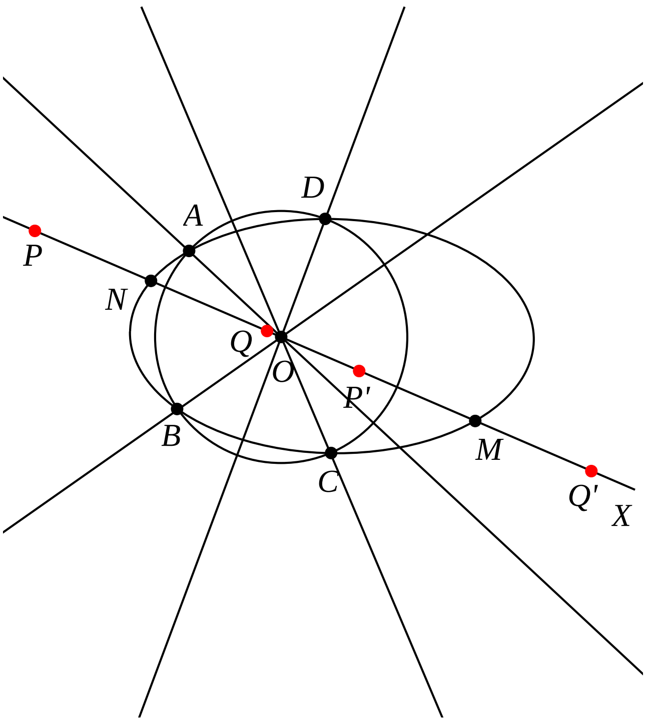

Figura 16

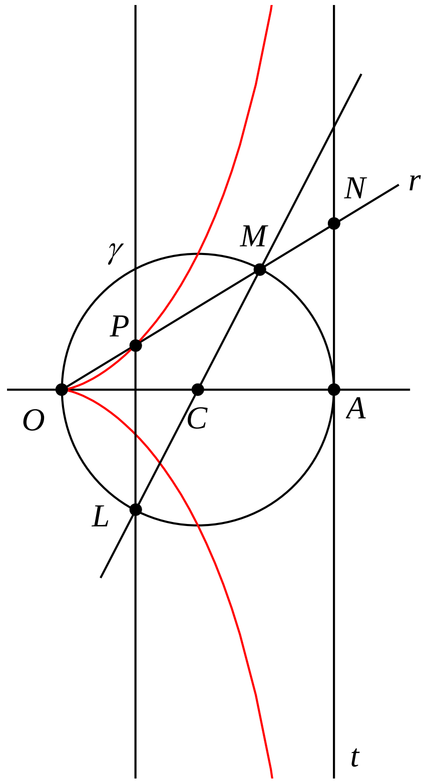

Figura 17

Esempio 3.7. *Concludiamo trattando di un'altra celebre curva: la* ***cissoide di Diocle*** *(fig.17), utilizzata dai geometri Greci per duplicare il cubo. La cissoide (retta) viene di solito definita nel modo seguente:*

Dato un cerchio γ di centro C e diametro OA e condotta la tangente t in A, si mandi la semiretta r di origine O che interseca γ e t in M ed N, rispettivamente. Si riporti, poi, su r un segmento $OP = MN$. Il luogo di P al variare di r è la cissoide (retta).

Osserviamo che, detto L il punto diametralmente opposto ad M, la LP risulta perpendicolare ad OA, sicchè la cissoide si può costruire per punti intersecando la OM con la perpendicolare per L alla OA. Essa può essere considerata, dunque, come il luogo dei punti d'intersezione delle rette omologhe di due fasci: l'uno di centro O, l'altro (improprio) costituito dalle parallele a t. Ad una retta per O corrisponde una parallela a t, mentre ad una parallela a t (che interseca γ in due punti) corrispondono due rette per O. Ne deduciamo che:

(a) La cissoide è un cubica che ha un punto doppio in O e passa per il punto all'infinito di t, che indichiamo con T_∞.

(b) Le due rette corrispondenti a OT_∞ (la perpendicolare in O alla OA) coincidono con OA; ciò consente di precisare che il punto doppio O è una *cuspide*, con tangente cuspidale la OA.

(c) Essendo ML un diametro di γ, OM e OL sono perpendicolari; quindi, facendo ricorso alla solita involuzione circolare di centro O, si può precisare che la cissoide passa per i punti ciclici (*cubica circolare*).

Riferimenti bibliografici

[1] T. Lemoyne, *Les lieux géométriques*, Vuibert, Paris, 1923

[2] L. Campedelli, *Lezioni di geometria*, vol II, Cedam, Padova, 1948

[3] O. Chisini, *Il principio di corrispondenza*, Period. Di Mat., 1952, 194-208

[4] F. Enriques, *Lezioni sulla teoria geometrica delle equazioni*, Zanichelli Bologna, 1904 (ristampa 1996)

[5] F. Enriques, *Lezioni di geometria proiettiva*, Zanichelli Bologna, 1915